이공계생을 위한

다이어트(DIET)

미 적 분

엮은이 박 철 서

NUCLEARACADEMY

df

머 리 말

“왜 미적분을 배워야 하는가?”

반론이 있을지 모르지만 고등학교 때 미적분을 배우는 이유는 결국 대학을 입학하기 위한 방편이었습니다. 그렇기 때문에 시험이 끝나고 나면 미적분을 기피하고 고등학교만 졸업하면 미적분을 아예 손을 놓고 접근조차 하지 않습니다. 학생들은 고등학교에서 미적분을 배우면서 지쳤기 때문에 다시는 미적분을 공부하지 않으리라 결심하게 됩니다.

그러나 현실은 그렇지 않습니다. 특히 예비 이공계생이나 이공계 대학에 이미 다니고 있는 학생들의 경우는 졸업할 때까지 미적분이 따라 다니면서 괴롭힙니다. 미적분을 기반으로 공업수학을 배우게 되고 이것을 이용하여 전공과정을 학습하게 되기 때문입니다.

여기서 다시 한번 짚어보고 넘어가야 할 것이 있습니다.

“대학에서 미적분을 배우는 목적이 무엇인가?”

우리는 미적분뿐만 아니라 수학은 “전공과정을 학습하기 위한 도구”라는 것을 잊어서는 안됩니다. 우리는 수학자가 되고자 하는 것이 아니라 미적분이라는 도구를 이용하여 전공과정을 이해하고자 하는 것입니다.

“미적분이라는 유용한 도구의 활용!” 이것이 목적입니다.

이공계생들은 수학자들이 만든 미적분을 활용하여 전공과정을 이해하면 됩니다. 물론 방대한 미적분의 유도과정을 이해하면 좋겠지만 본래의 학습목적을 벗어날 뿐만 아니라 흥미를 잃어버릴 위험을 감수하면서 그럴 필요는 없습니다.

그래서 목적에 벗어난 불필요한 내용을 완전히 배제하고 목적에 맞게 실전에 바로 적용할 수 있도록 만든 책이 **"다이어트 미적분"**입니다.

쉬운 미적분은 결코 존재하지 않으며, 더 더욱 중요한 것은 학생 자신이 미적분을 멀리하고 시작조차 하지 않는다면 이공계대학에서 수학할 수 없습니다.

이 책은 예비 이공계대학생이나 미적분이 약한 이공계대학생이 공업수학이나 전공과정을 이해하는데 반드시 필요한 내용을 구술형식으로 기술하고 있습니다. 순서대로 읽고 풀어 본다면 반드시 좋은 성과가 있을 것으로 확신합니다. 물론 이 책에 대한 평가는 이 책을 학습하는 독자들의 몫입니다.

마지막으로 이 책의 출판을 위해 많은 도움을 주신 부경대학교 물리학과 심규성박사님, 가야대학교 방사선학과 김종언교수님, 뉴크리어아카데미의 노현미사장님, 김지현선생님, 그리고 쉽게 글을 쓸 수 있도록 영감을 주신 인터넷 블로그의 선생님들께 깊은 감사를 드립니다.

2013년 엮은이

목　　차

Ⅰ. 들어가기

Ⅱ. 미분

Ⅲ. 적분

Ⅳ. 미적분의 응용

Ⅴ. 미분방정식

Ⅰ. 들어가기

1. 함수란 무엇인가?

함수는 영어로 function이라고 하며 "기능" 또는 "작용"의 의미를 가진다. y는 x의 함수를 $y=f(x)$라고 표기한다. 이때 f는 function의 머리글자이다. $y=f(x)$에서 $f(x)$는 함수의 일반적인 형태를 나타내므로 $f(x)=2x+3$이든 $f(x)=x^3+2x$이든 어떤 것이든 상관없다. x에 어떤 구체적인 수치를 입력할 경우 그 즉시 y도 어떤 수치로 출력이 된다. 다음의 그림1-1에서 함수를 좀 더 쉽게 이해해보자.

$$x \longrightarrow \boxed{\;y=f(x)\;} \longrightarrow y$$

그림1-1

그림1-1에서 보듯이 마치 잘 만들어진 장치에 재료 x를 넣으면 그 재료로 인해 완성된 y가 만들어져 나오는 것과 같다. 구체적인 함수로 표현된 그림2-1을 보고 이해해보라.

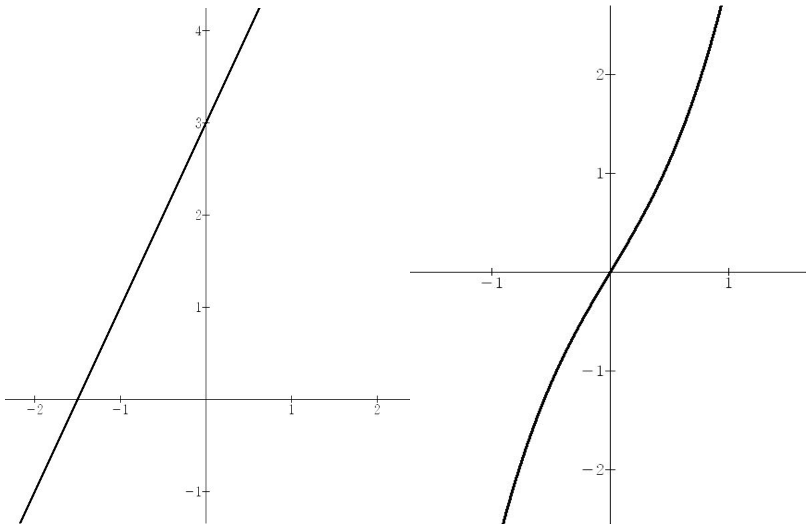
$$\begin{matrix} x=1 \\ x=2 \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\;y=2x+3\;} \longrightarrow \begin{matrix} y=5 \\ y=7 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x=1 \\ x=2 \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\;y=x^3+2x\;} \longrightarrow \begin{matrix} y=3 \\ y=12 \end{matrix}$$

그림1-2

그런데 이러한 함수는 문자식으로 표현되어 있기 때문에 입력된 x에 출력되는 y가 어떤 대응 관계에 있는지 구체적으로 알아내기가 용이하지

않다. 따라서 이를 좀 더 구체적으로 이해하고 눈으로 보기 위해 x축과 y축으로 표시되는 좌표평면을 활용하여 그래프를 그리는 방법을 사용한다. 그림1−2를 그래프로 그리면 그림1−3으로 표현할 수 있다.



$y=2x+3$ $\qquad$ $y=x^3+2x$

그림1−3

함수에서 입력되는 x와 출력되는 y의 값을 "변수(variable)"라고 하는데, 변수란 그 크기가 변할 수 있는, 즉 상이한 값을 취할 수 있는 수이며 조건에 따라 변할 수 있는 값이다. 변수x와 y사이에 x의 값이 정해지면 이에 따라 y값이 정해진다는 관계가 있을 때, y는 x의 함수라고 한다.

변수는 독립변수(independent variable)와 종속변수(dependent variable)로 분류할 수 있다. 독립변수란 함수 관계에서 다른 변수의 변화와 관계없이 독립적으로 변화하는 변수를 말한다. 이에 반해 종속변수는 함수 관계에서, 다른 변수의 변화에 따라서만 바뀌는 변수를 말한다. 즉 $y=f(x)$에서 x는 독립변수가 되며 x의 변화에 종속되어 변하는 y를 종속변수라 한다.

(참고)

시간과 조건에 영향을 받지 않고 정해져 있는 수를 "상수"라고 한다. 일반적으로 상수는 알파벳 $a, b, c...$로 표시하며 원주율 π 와 자연로그의 밑 e 도 상수이다.

2. 미분과 적분의 기본적인 기호

미분의 기본적인 부호에는 "d"("디(differential)"라고 읽는다.)가 있다. 기호 d는 "어떤 것(d의 뒤에 붙어 나오는 기호의 크기)의 무한히 작은 부분"을 나타낸다. 예를 들어 dx라 함은 x의 매우 작은 부분(x의 미분치)을 나타내며, "디 엑스"라고 읽는다. dy는 y의 매우 작은 부분(y의 미분치)을 나타내고 "디 와이"라고 읽는다.

적분의 기본적인 부호에는 "$\int$"("인테그럴(integral)"이라고 읽는다.)이 있다. $\int$ 기호는 "$\int$ 뒤에 나오는 어떤 것의 총합(전부)"이라는 의미이다. 생소해 보이지만 Summation(합계)의 "S"를 길게 늘려서 표시한 것이다. 예를 들어 x를 매우 작은 부분 dx의 조각들로 나누어 보면 x는 dx들의 합이 될 것이다. "dx들을 모두 합하라"는 명령은 $\int dx$이며, 이것의 의미는 "x의 매우 작은 부분인 dx의 총합"이라는 의미이므로 $\int dx = x$가 된다.

따라서 미분은 "매우 작은 부분"을 의미하고 적분은 "매우 작은 부분들의 총합(전체)"을 의미한다.

3. 이항정리

이항정리(binomial theorem)는 "이항식의 거듭제곱을 전개하는 방법을 나타내는 공식"이다.

$$(a+b)^n = a^n + \frac{na^{n-1}b}{1!} + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{3!} + \dots + b^n$$
$$= a^n(1+\frac{b}{a})^n$$

활용도가 매우 높은 공식이므로 다양한 문제들을 통해서 반드시 숙지해야 한다.

여기서 "!(factorial, 팩토리얼)"은 "!의 앞의 숫자로부터 시작하여 1 씩 감소시켜 가면서 최종적으로 1까지 곱하라"는 명령어이다. 즉

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 1$$

이 되며 "!"을 "계승"이라고도 한다. 예를 들어보면 다음과 같다.

$1! = 1$
$2! = 2 \times 1$
$3! = 3 \times 2 \times 1$
$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$
$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
...

그럼 이항정리를 이용하여 $(x+y)^3$을 전개해보자. 물론 풀이를 보지 않고 직접 해봐야 한다.

$$
\begin{aligned}
(x+y)^3 &= x^3 + \frac{3x^2y}{1!} + \frac{3\times2\times xy^2}{2!} + \frac{3\times2\times1\times x^0y^3}{3!} \\
&= x^3 + \frac{3x^2y}{1} + \frac{3\times2\times xy^2}{2\times1} + \frac{3\times2\times1\times y^3}{3\times2\times1} \\
&= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3
\end{aligned}
$$

이번에는 좀 다른 식을 전개해보자. 만약 x의 매우 작은 양을 dx라고 할 때 $\frac{1}{(x+dx)^2}$을 이항정리를 이용하여 전개해보자.

$\frac{1}{(x+dx)^2}$은 $(x+dx)^{-2}$이라 쓸 수 있고 이항정리의 공식에서 다시 $x^{-2}(1+\frac{dx}{x})^{-2}$라 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{(x+dx)^2} = (x+dx)^{-2} = x^{-2}(1+\frac{dx}{x})^{-2}$$

이 식을 이항정리를 이용하여 전개하면

$$x^{-2}(1+\frac{-2\frac{dx}{x}}{1!}+\frac{(-2)\times(-3)\times(\frac{dx}{x})^2}{2!}+\ldots)=x^{-2}-2x^{-3}dx+3x^{-4}dx^2\ldots$$

이 된다. 여기서, dx와 dx의 곱이란 x의 매우 작은 부분끼리의 곱이다. 만약 x의 매우 작은 값인 dx가 $\frac{1}{3600}$이라면 dx와 dx의 곱은 $\frac{1}{3600}\times\frac{1}{3600}=\frac{1}{12960000}$이 되어 매우 작은 값이므로 이를 무시$(\rightarrow 0)$할 수 있다.

좀 더 자세히 알아보자.

x를 어떤 양으로 잡고 매우 작은 분량 dx 만큼씩 불어 난다고 하면 $x+dx$가 된다. $x+dx$를 제곱하면 $(x+dx)^2$이 되어 $x^2+2xdx+(dx)^2$이 된다. 이 때 $2xdx$는 무시할 수 없지만 $(dx)^2$(괄호를 생략하고 dx^2으로 표기한다.)은 x의 미소분량의 제곱치이므로 이는 무시할 수 있게 된다. 따라서 $(x+dx)^2$은 x^2+2xdx가 된다. "미소분량의 제곱치 이후부터는 무시한다"는 것을 반드시 기억하자.

결국 $3x^{-4}dx^2$이후의 값들은 0으로 처리할 수 있다.

따라서 $\dfrac{1}{(x+dx)^2}$은 $x^{-2}-2x^{-3}dx$이 된다.

이항정리 공식을 이용하여 이항식의 거듭제곱을 전개 할 경우에는 익숙해질 때까지는 반드시 공식을 써놓고 천천히 하나 하나 맞추어 풀이하는 습관을 들이는 것이 좋다. 그래야 실수를 하지 않는다. 그리고 이항정리 공식을 이용하지 않고는 이 책을 학습할 수 없으므로 자유자재로 활용할 수 있도록 반드시 숙지하기 바란다.

Ⅱ. 미분

1. 미분은 순간변화율이다.

움직이고 있는 물체나 공간, 운동상태 등이 어떤 순간에 어떻게 변화하는지를 아는 것은 매우 중요하다. 어느 한 순간에 그 대상이 어떻게 변화하는지를 알게 되면 미래의 다른 시점에서의 변화를 예측할 수 있게 된다. 미분은 움직이고 있는 세계의 미래를 예측하는 수학적 기술이라고 할 수 있다. 미분에 대한 가장 정확한 표현은 “순간변화율”이다.

먼저 변화율에 대해 알아보자. 변화율이란 상대적인 개념이다. 예를 들어 속도는 시간에 대한 위치의 변화율이고, 그래프에서 직선의 기울기는 x값에 대한 y값의 변화율이다. 이 처럼 변화율은 시간이나 x값과 같은 기준이 반드시 존재하며, 기준이 무엇인가에 따라서 변화율은 달라진다. 변화율에는 직선의 경우 사용하는 변화율, 곡선의 두 지점을 연결한 부분의 변화율을 표현하는 평균변화율, 곡선의 한점에서의 변화율을 나타내는 순간변화율이 있다. 우리가 미분을 공부하는 것은 이 순간변화율을 알기 위해서이다. 순간변화율은 “곡선 그래프에서 접선의 기울기”이다.

어떤 함수 $f(x)$를 미분하였다는 표시는 $f'(x)$(“에프 프라임 엑스”라고 읽는다.)로 나타내고 이것을 “도함수”라고 한다. $f'(x)$는 다음과 같이 정의한다.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

이 식은 미분을 처음 배울 때 가장 먼저 접하게 되는 공식이며, 함수의 극한에서 배웠다. 극한(limit)이란 접근을 바탕으로 하는 수학의 한 방법

으로 "한 없이 어떤 값에 가까워진다"는 개념이다. 어떤 함수 $f(x)$에서 x가 어떤 값 a에 한없이 가까워짐에 따라 $f(x)$도 어떤 값 b에 한없이 가까워지면 b를 $f(x)$의 극한 또는 극한값이라 하고, 이것을 다음과 같이 표현한다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

이 식은 "함수 $f(x)$에서 x가 a에 한 없이 가까워질 때 $f(x)$는 b에 가까워진다."라고 풀어 쓸 수 있다. 식을 보면 이러한 개념이 떠오르도록 훈련해야 한다. 극한은 미적분의 기초가 되는 중요한 개념이다. 그럼 앞서 기술했던 도함수는 어떤 의미일까? 이것을 이해하기 위해 변화율에 대해 알아보자.

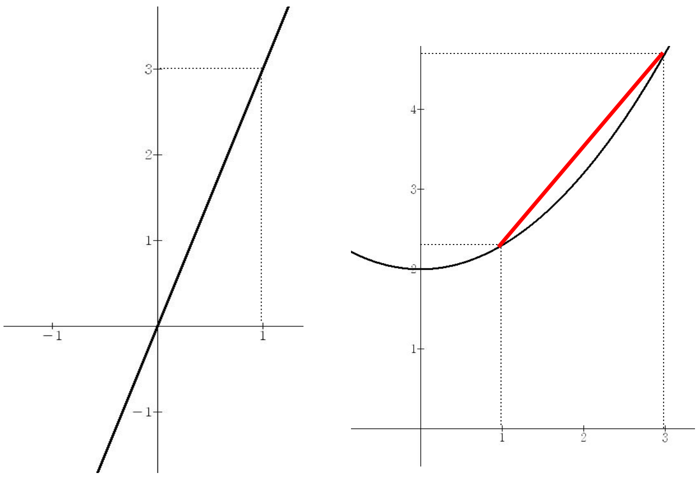


그림2−1

그림2−1의 왼쪽 직선 그래프의 경우 기울기가 3인 직선이다. 기울기가 3이라는 말은 x가 1 변화하면 y가 3 변화한다는 의미이며, x값이 1의 비율로 변하면 y는 3의 비율로 변한다는 말이다. 즉 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=3$라는 말이다. 이처럼 주어진 구간에서 x축에 대한 y축의 변화가 일정할 경우 변화율이라는 용어를 사용한다.

그림2-1의 오른쪽 곡선 그래프의 경우 변화율은 직선이 아니기 때문에 변화율이 계속 변한다. 따라서 a와 b구간에서의 변화율, 즉, 평균변화율로 나타낼 수 있다.

$$\text{평균변화율} = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1}$$

그럼 이 평균변화율을 이용하여 곡선의 어느 한 지점에서의 변화율, 즉 순간변화율에 대해 알아보자.

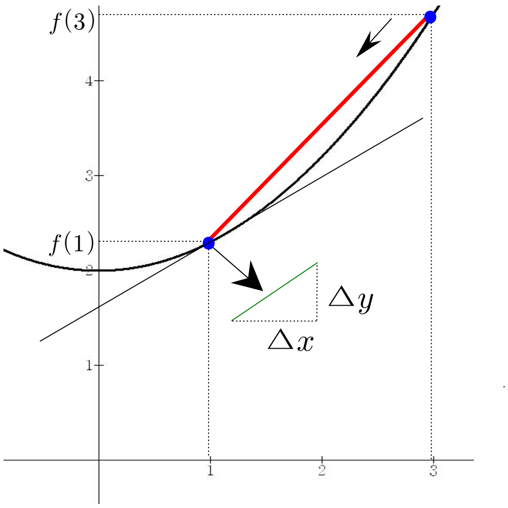


그림2-2

그림2-2에서 $f(3)$의 지점을 $f(1)$의 한 점으로 무한히 근접시켜 보자. 곡선상의 한 지점을 확대하면 부분적으로 곡선의 한 지점은 그림2-2에서 보인 것처럼 직선으로 표현할 수 있다. 이 직선의 기울기가 바로 해당하는 한 지점의 순간변화율이다. 그럼 다음 식의 의미를 다시 생각해보자.

$$f'(x) = \lim_{h \to \triangle x} \frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{(x+\triangle x)-x}$$

위 식에서 분모는 "$(x+\Delta x)-x$"는 Δx가 되며, 분자는 함수$f(x)$에 $x+\Delta x$를 대입하여 구한 y의 값과 함수$f(x)$에 x를 대입하여 구한 y의 차인 Δy에 해당한다. Δx를 h라 두고 0에 근접하게 하면 다음의 식으로 표현할 수 있다.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

이 식이 함수$f(x)$의 "도함수" 또는 "미분계수"를 구하는 식이며, 어떤 함수의 한 점에서의 변화율, 즉 "순간변화율"이 된다. 도함수 또는 미분계수는 기하학적으로 "접선의 기울기"에 해당한다.

도함수는 영어로 "derivative"이며, "원래 함수의 비례하는 비율을 나타내는 함수"라는 뜻이다. 이처럼 미분이라는 것은 도함수를 구하는 것이고 도함수는 주어진 함수의 미분계수를 함수값으로 가지는 함수이며, 기하학적으로는 접선의 기울기를 구하는 것이다.

미분계수는 $f'(x)$ 또는 $\frac{dy}{dx}$로 표시한다. $\frac{dy}{dx}$의 값을 구하는 것을 "미분(differentiation)"이라고 하며, $\frac{dy}{dx}$를 "x에 대한 y의 미분계수" 또는 "y를 x로 미분한다"고 한다. 이때 dx나 dy는 무한히 작은 값이다.

2. 미분치를 읽는 방법

$\frac{dy}{dx}$는 "디 와이 디 엑스"(또는 "디 와이 over 디 엑스")라고 읽으며, "디 엑스 분의 디 와이"라고 읽어서는 안된다.

$\frac{dy}{dx}$는 어떤 함수를 미분하였다는 것을 표시하는 방법으로 $f(x)$에 엑센트 부호를 붙여 $f'(x)$라고도 표시한다. 앞서 언급한대로 "에프 프라임 엑스"라고 읽는다. 달리 "에프 대쉬 엑스"라고 읽기도 하는데 dash는 "−"를 말하므로 정확한 표현은 아니다.

$$y = f(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$f'(x)$를 다시 미분하면 새로운 함수 $f''(x)$(에프 더블 프라임)이 되고 "$f(x)$의 2계미분"이라 하며, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f''(x) = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

이것은 "디 투 와이 디 엑스 제곱"(또는 "디 투 와이 over 디 엑스 제곱")이라고 읽는다.

3. 미분의 기본공식

간단한 함수들을 어떻게 미분하는지 기본 원리를 이용하여 알아 보자. 미분의 기본적인 개념은 "변화"이다. $y=f(x)$에서 x값의 변화에 따라 y값의 변화를 구하는 것이 미분이다.

예를 들어 $y=x^2$라는 함수가 있다고 하자.
x가 조금 증가하여 $x+dx$가 될 경우 y는 $y+dy$가 될 것이다. 따라서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$y+dy=(x+dx)^2$

이 식을 풀면 $y+dy=x^2+2xdx+dx^2$이 되며, 여기서 dx^2은 x의 미소분량의 제곱치이므로 이는 무시할 수 있다.

따라서 $y+dy=x^2+2xdx$가 되며, $y=x^2$이므로 양변에서 소거하면 $dy=2xdx$가 되며, $\dfrac{dy}{dx}=2x$가 된다.

우리가 구하려고 하는 것은 $\dfrac{dy}{dx}$이며, y의 증가분 dy와 x의 증가분 dx의 비이며, 그것은 $2x$이다.

도함수의 정의를 이용한 풀이

$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$에서 $y=x^2$이므로

$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}$

이다. x^2은 소거되고 h^2은 미소분량의 제곱치이므로 무시할 수 있다. 따라서 식을 정리하면 다음과 같다.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{2hx}{h}=2x$$

기본원리를 이용하여 구한 값과 결과가 같음을 알 수 있다.

이번에는 $y=x^3$을 미분해보자.

$$y+dy=(x+dx)^3$$

이항정리를 이용하여 풀면 다음과 같다.

$$y+dy=(x+dx)^3=x^3+\frac{3x^2dx}{1!}+\frac{3\times 2\times xdx^2}{2!}+\frac{3\times 2\times 1\times x^0dx^3}{3!}$$

$$y+dy=x^3+3x^2dx+3xdx^2+dx^3$$

$y=x^3$이므로 양변의 y와 x^3을 소거한다.

$$dy=3x^2dx+3xdx^2+dx^3$$

$3xdx^2$와 dx^3은 미소분량의 제곱이므로 무시할 수 있다.

$$dy=3x^2dx\ \rightarrow\ \frac{dy}{dx}=3x^2$$

도함수의 정의를 이용한 풀이

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$에서 $y=x^3$이므로

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3h^2x + h^3 - x^3}{h}$$

이다. x^3은 소거되고 $3h^2x$와 h^3은 미소분량의 제곱치이므로 무시할 수 있다. 따라서 식을 정리하면 다음과 같다.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3hx^2}{h} = 3x^2$$

역시 기본원리를 이용하여 구한 값과 결과가 같다.

동일한 방법으로 $y = x^4$과 $y = x^5$을 미분하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$y = x^4 \rightarrow y' = 4x^3$$
$$y = x^5 \rightarrow y' = 5x^4$$

그렇다면 거듭제곱이 음수인 경우는 어떻게 될까?

$y = x^{-2}$이라고 할 경우 $y + dy = (x + dx)^{-2} = x^{-2}(1 + \frac{dx}{x})^{-2}$이 된다.

이항정리를 이용하여 풀면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y + dy &= x^{-2}\left(1 + \frac{-2\frac{dx}{x}}{1!} + \frac{(-2)\times(-3)\times(\frac{dx}{x})^2}{2!} + \ldots\right) \\ &= x^{-2} - 2x^{-3}dx + 3x^{-4}dx^2 + \ldots \end{aligned}$$

여기서 $3x^{-4}dx^2$이후의 작은 분량들의 제곱들은 무시할 수 있으므로 $y + dy = x^{-2} - 2x^{-3}dx$가 되며 y와 x^{-2}을 소거하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{dy}{dx} = -2x^{-3}$$

도함수의 정의를 이용한 풀이

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$에서 $y = x^{-2}$이므로

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^{-2} - x^{-2}}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^{-2} - 2x^{-3}h + 3x^{-4}h^2 + \ldots - x^{-2}}{h}$$
$$= -2x^{-3}$$

이다. x^{-2}은 소거되고 $3x^{-4}h^2$이후의 작은 분량들의 제곱들은 무시할 수 있으므로 $-2x^{-3}$을 얻을 수 있다. 기본원리를 이용하여 구한 값과 결과가 같다.

이번에는 거듭제곱이 분수인 경우도 알아보자.

$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$이라고 할 경우 $y + dy = (x + dx)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{dx}{x})^{\frac{1}{2}}$이 된다.

이항정리를 이용하여 풀면 $y + dy = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}} - \frac{1}{8}\frac{dx^2}{x\sqrt{x}} + \ldots$이 되고 $-\frac{1}{8}\frac{dx^2}{x\sqrt{x}}$이후의 작은 분량들은 무시할 수 있다.

$$y + dy = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

y와 $\sqrt{x}$을 소거하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

도함수의 정의를 이용한 풀이

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 에서 $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ 이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x}+\frac{1}{2}\frac{h}{\sqrt{x}}-\frac{1}{8}\frac{h^2}{x\sqrt{x}}+\ldots-\sqrt{x}}{h}$$

이다. $\sqrt{x}$ 는 소거되고 $\frac{1}{8}\frac{h^2}{x\sqrt{x}}$ 이후의 값을 무시할 수 있으므로 $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ 을 얻을 수 있다. 기본원리를 이용하여 구한 값과 결과가 같다.

정리를 해보면 다음과 같다.

$y=x^2 \rightarrow y'=2x$

$y=x^3 \rightarrow y'=3x^2$

$y=x^4 \rightarrow y'=4x^3$

$y=x^5 \rightarrow y'=5x^4$

$y=x^{-2} \rightarrow y'=-2x^{-3}$

$y=x^{\frac{1}{2}} \rightarrow y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

상기 여러 예제의 계산 결과로부터 x^n을 미분하면 거듭제곱의 수 n을 곱하면서 거듭제곱의 수를 1만큼 작게 한다.

$$y=x^n \rightarrow y'=nx^{n-1}$$

도함수의 정의를 이용한 미분 기본공식의 증명

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ 에서 $y = x^n$이므로

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + \frac{nx^{n-1}h}{1!} + \frac{n(n-1)x^{n-2}h^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-3)x^{n-3}h^3}{3!} \cdots - x^n}{h}$$

이다. x^n은 소거되고 $\frac{n(n-1)x^{n-2}h^2}{2!}$이후의 값을 무시할 수 있으므로 nx^{n-1}을 얻을 수 있다.

다음 예제를 직접 풀이를 보지 않고 미분해보자.

(예제) $y = x^{11}$
(풀이)
$y' = 11x^{10}$

(예제) $y = x^{-\frac{5}{2}}$
(풀이)
$y' = -\frac{5}{2}x^{-\frac{7}{2}}$

(예제) $y = x^{3a}$
(풀이)
$y' = 3ax^{3a-1}$

(예제) $u = t^{2.58}$

(풀이)

$u' = 2.58x^{1.58}$

(예제) $z = \sqrt[7]{u}$

(풀이)

변형 $z = u^{\frac{1}{7}} \rightarrow z' = \dfrac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}}$

(예제) $y = \sqrt[3]{z^{-5}}$

(풀이)

변형 $y = z^{-\frac{5}{3}} \rightarrow y' = -\dfrac{5}{3}x^{-\frac{8}{3}}$

(예제) $u = \sqrt[5]{\dfrac{1}{x^3}}$

(풀이)

변형 $u = x^{-\frac{3}{5}} \rightarrow u' = -\dfrac{3}{5}x^{-\frac{8}{5}}$

(예제) $y = 2x^{3a}$

(풀이)

$y' = 6ax^{3a-1}$

(예제) $z = \sqrt[q]{x^p}$

(풀이)

변형 $z = x^{\frac{p}{q}} \rightarrow z' = \dfrac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$

(예제) $y = \sqrt[a]{\dfrac{1}{x^b}}$

(풀이)

변형 $y = x^{-\frac{b}{a}} \longrightarrow y' = -\dfrac{b}{a}x^{-\frac{b}{a}-1}$